

Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Garben mit indizierten Pfeilen

1. In Toth (2010a) hatten wir gezeigt, wie man semiotische Kategorien mit kontexturierten Pfeilen darstellen kann. Ist dies auch mit Garben möglich, d.h. nach dem Überang von lokalen zu globalen kategoriethoretischen Situationen? In Toth (2010b) wurde der Vorschlag gemacht, Kategorien und Garben sowie ihre Inversen unter Verzicht auf Zusatzbedingungen wie Identität und Komposition rein strukturell wie folgt zu definieren:

$$\underline{K} = (X_{\alpha,\beta}, \pi, Y_{\gamma,\delta}, i, j \in C)$$

$$\underline{K}^{\circ} = (Y_{\delta,\gamma}, \pi, X_{\beta,\alpha}, i, j \in C) \text{ (duale Kategorie: } \times K = (Y_{\gamma,\delta}, \pi, X_{\alpha,\beta}, i, j \in C))$$

$$\underline{G} = (G_{\alpha,\beta}, \pi, X_{\gamma,\delta}, i, j \in C)$$

$$\underline{G}^{\circ} = (X_{\delta,\gamma}, \pi, G_{\beta,\alpha}, i, j \in C).$$

Die 4 mathematischen Grundelemente sind damit völlig parallel, bis auf die Tatsache, dass hier stillschweigend vorausgesetzt wurde, dass die semiotischen Bedingungen erfüllt sind, um von Garben auf topologischen Mengen auf Garben auf Kategorien schliessen zu dürfen. Damit hatten wir natürlich ein Resultat von Grothendieck vorausgesetzt, das in einem neuen Buch wie folgt leichtfasslich umschrieben wird: „As already mentioned, sheaves of topological spaces were invented by Leray and this notion was extended to sheaves on categories by Grothendieck who noticed that the notion of sheaves on a topological space X essentially relies on the category Op_X of open subsets of X and on the notion of open coverings, nothing else. Hence to define sheaves on a category C , it is enough to axiomatize the notion of a covering which defines a so-called Grothendieck topology on C ” (Kashiwara and Shapira 2006, S. 390).

2. Als Indizierung benutzen wir im folgenden, wie bereits in Toth (2010b), das Lokailitätsmass über einem Intervall

$$L = [1, 6].$$

Dieses besagt, dass etwa der „Halm“ (1.1) nur in eine Garbe eingeht und daher maximal lokal ist $(1.1)_1$ während etwa der Halm (1.3) maximal global ist, da er sich zu 6 Garben verbindet $(1.3)_6$. Für die Monaden gilt (mit $(a.b)_L = (a.b)^0_L$):

$$1.1_1, 1.2_3, 1.3_6$$

$$2.1_3, 2.2_4, 2.3_3$$

$$3.1_6, 3.2_3, 3.3_1$$

Für die Dyaden haben wir:

$$(2.1\ 1.1)_1, (2.1\ 1.2)_1, (2.1\ 1.3)_1$$

$$(2.2\ 1.2)_2, (2.2\ 1.3)_2$$

$$(2.3\ 1.3)_3$$

$$(3.1\ 2.1)_3, (3.1\ 2.2)_2, (3.1\ 2.3)_1$$

$$(3.2\ 2.2)_2, (3.2\ 2.3)_1$$

$$(3.3\ 2.3)_1$$

$$(3.1\ 1.1)_1, (3.1\ 1.2)_2, (3.1\ 1.3)_3$$

$$(3.2\ 1.2)_1, (3.2\ 1.3)_2$$

$$(3.3\ 1.3)_1$$

Ferner gehen wir aus von der folgenden, schon früher von mir eingeführten „Pfeil-Matrix“:

$\downarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$
 $\leftarrow \quad \downarrow \quad \rightarrow$
 $\leftarrow \quad \leftarrow \quad \downarrow,$

die entweder durch Indizierung durch Kontexturierung (wie ebenfalls in früheren Publikationen gezeigt) oder nun durch Indizierung durch Lokalitätsgrade desambiguiert werden kann. Damit erhalten wir o.B.d.A. aus dem obigen System das folgende:

$\downarrow_1, \rightarrow_3, \rightarrow_6$

$\leftarrow_3, \downarrow_4, \rightarrow_3$

$\leftarrow_6, \leftarrow_3, \downarrow_1$

Für die Dyaden haben wir:

$(\leftarrow \downarrow)_1, (\leftarrow \rightarrow)_1, (\leftarrow \rightarrow)_1$

$(\downarrow \rightarrow)_2, (\downarrow \rightarrow)_2$

$(\rightarrow \rightarrow)_3$

$(\leftarrow \leftarrow)_3, (\leftarrow \downarrow)_2, (\leftarrow \rightarrow)_1$

$(\leftarrow \downarrow)_2, (\leftarrow \rightarrow)_1$

$(\downarrow \rightarrow)_1$

$(\leftarrow \downarrow)_1, (\leftarrow \rightarrow)_2, (\leftarrow \rightarrow)_3$

$(\leftarrow \rightarrow)_1, (\leftarrow \rightarrow)_2$

$(\downarrow \rightarrow)_1$

Damit ist also die Semiotik in Form von Garben mit indizierten Pfeilen und somit in noch grösserer Abstraktion als in Form von Pfeilen für Kategorien darstellbar.

Bibliographie

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. New York 2006

Toth, Alfred, Vorüberlegungen zu einem semiotischen Garbenbegriff. In:
Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Kontexturierte Kategorien und Garben. In: Electronic Journal for
Mathematical Semiotics, 2010b

11.12.2010